





2ª Fase – Nível II

Aluno(a): \_\_\_\_\_

Escola: \_\_\_\_\_

Município: \_\_\_\_\_

**01.** João deseja montar um tabuleiro plano para um novo jogo que ele criou. Para isto, ele irá colar peças quadradas cujos lados medem  $2\text{ cm}$ , de modo que o lado de uma peça coincida com o lado de outra peça. Ao final, João quer obter um tabuleiro retangular com área de pelo menos  $600\text{ cm}^2$  e com um dos lados medindo o dobro do outro.

Qual é o menor número de peças que João terá que usar?

- A) 128
- B) 162
- C) 184
- D) 196
- E) 222

**02.** A função  $f: \{1, 2, 3, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que  $f(1) = 1$  e  $f(x+1) = f(x) + 2^x$ , para todo  $x$  do seu domínio.

Nessas condições, qual é o valor de  $f(2023)$ ?

- A)  $2^{2023} - 1$
- B)  $2^{2023}$
- C)  $2^{2023} + 1$
- D)  $2^{2023} + 2$
- E)  $2^{2022}$

**03.** Considere que  $a$ ,  $b$  e  $c$  sejam números inteiros positivos distintos, tais que  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ .

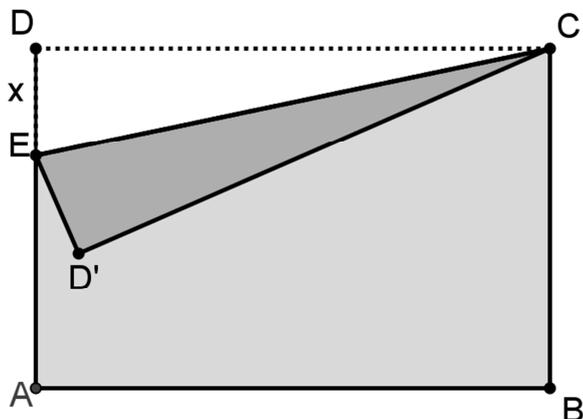
Nessas condições, qual é o valor de  $a + b + c$ ?

- A) 9
- B) 11
- C) 13
- D) 17
- E) 22

**04.** Quantos números naturais de quatro algarismos existem, escritos no sistema decimal, tais que sejam quadrados perfeitos e da forma  $aabb$ , onde  $a$  e  $b$  são algarismos?

- A) nenhum
- B) um
- C) dois
- D) três
- E) mais de três

**05.** Joana pegou uma folha de papel retangular  $ABCD$ , em que  $AB = 30 \text{ cm}$  e  $AD = 20 \text{ cm}$  e, sobre o lado  $\overline{AD}$ , marcou um ponto  $E$  a uma distância  $x$  de  $D$ , vincou esta folha através do segmento  $\overline{EC}$  e a dobrou conforme a figura abaixo.



Qual é a área, em  $\text{cm}^2$ , do quadrilátero  $ABCE$  quando  $D'$  estiver sobre o lado  $\overline{AB}$ ?

- A)  $90(3\sqrt{5} - 2)$
- B)  $90(3\sqrt{5} - 1)$
- C)  $90(2\sqrt{5} - 1)$
- D)  $75(3\sqrt{5} - 1)$
- E)  $75(3\sqrt{5} - 2)$

**06.** Dado o conjunto  $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ , formam-se subconjuntos  $B$ , não vazios, com  $k$  elementos, de modo que em  $B$  não existem dois elementos consecutivos nem contém elementos menores do que  $k$ . Quantos subconjuntos  $B$  podem ser formados?

- A) 55
- B) 56
- C) 57
- D) 58
- E) 59

**07.** Cristina criou um aplicativo para celular que é capaz de realizar cálculos matemáticos. Este aplicativo possui um ícone especial com o símbolo  $\Re$ , além dos ícones com todos os algoritmos e os símbolos das operações aritméticas usuais. Para qualquer número real  $x$ , diferente de 3, informado pelo usuário, clicando no ícone  $\Re$  o aplicativo disponibiliza na tela do celular o resultado da expressão  $\frac{3x-2}{x-3}$ . Por exemplo, se o usuário abrir o aplicativo e digitar o número 1, clicando no ícone  $\Re$  o aplicativo devolve na tela o valor  $-0,5$  (pois  $\frac{3 \cdot 1 - 2}{1 - 3} = -0,5$ ).

Roberto ficou fascinado com o aplicativo criado por Cristina e o instalou no seu celular. A fim de testar se os resultados obtidos eram realmente corretos, Roberto informou ao aplicativo o número 4 e clicou, seguidamente, 2023 vezes no ícone  $\Re$ .

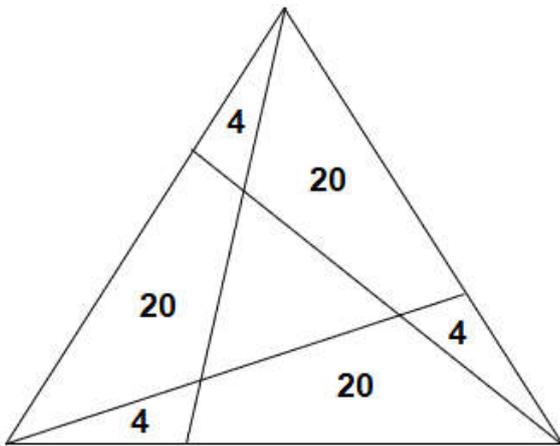
Estando o aplicativo a funcionar corretamente, qual deve ser o resultado final devolvido na tela do celular pelo aplicativo?

**08.** As medidas dos lados, em metros, de três terrenos quadrados são, respectivamente, três números inteiros positivos, ímpares e consecutivos. Sabe-se também que a soma das áreas, em metros quadrados, desses terrenos é um número natural de quatro dígitos, em que todos os dígitos são idênticos.

Qual é a soma das áreas dos três terrenos, em metros quadrados?

**09.** Marcam-se 100 pontos sobre uma circunferência dividindo-a em 100 arcos congruentes. Com vértices escolhidos dentre esses pontos, foram construídos todos os polígonos convexos possíveis de três até cem lados. Sabendo que os polígonos convexos de  $n$  lados são os que aparecem em maior quantidade, qual o valor de  $n$ ?

**10.** No imenso jardim de sua mansão, o professor Pardal pretende construir um canteiro em forma de triângulo equilátero dividido por três retas em sete regiões, três delas idênticas e de  $4 \text{ m}^2$ , nas quais serão plantadas bromélias, outras três idênticas e de  $20 \text{ m}^2$ , nas quais serão plantadas margaridas e a região central, na qual serão plantados cravos brancos, conforme mostra figura a seguir.



Qual será a área da região central, em metros quadrados, reservada ao plantio de cravos brancos?